

利用 Box 样条构造完全重构模型的研究

袁晓君 李 华

(中科院计算所 CAD 开放实验室, 北京 100080)

摘 要 针对图象处理中的图象重构问题, 结合多频带 DFT 滤波器库和双变量 Box 样条构造了一个完全重构模型. 在介绍了 DFT 滤波器库后, 给出了形成完全重构模型的条件. 通过双变量 Box 样条及其在图象处理中极为有用的几条性质的分析, 提出了一类双变量 Box 样条, 使用该样条即可构造分解/重构模型. 实验证明, 该模型能满足完全重构条件, 并可有效分解合成图象. 最后, 给出了应用此模型的实验结果.

关键词 DFT 滤波器库 双变量 Box 样条 分析/综合框架

中图法分类号: TP391.4 TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2001)02-0195-04

Research of Constructing a Perfect Reconstruction Model Using Box Spline

YUAN Xiao-jun, LI Hua

(CAD Lab, Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract This paper presents a method to combine so-called multiband DFT filter bank with bivariate Box splines to construct a perfect reconstruction model for image processing. Based on the theory of B-splines, which are useful tool in many fields, Box Spline is said to be an extension, with the aim at describing multi-variate functions. In this paper, firstly, it introduces the DFT filter bank, and presents the condition to form a perfect reconstruct model. Then it describes bivariate Box splines and its some properties in little more details. It especially presents a particular class of bivariate Box splines, and use it to construct a decomposition/reconstruction model, which may be candidates for some kinds of task in image processing. This model is proved to be satisfied by the perfect reconstruction condition, and thus can be quite useful theoretically. At last, some experimental results are given to demonstrate the use fulness of this model.

Keywords DFT filter bank, Bivariate box spline, Analysis/synthesis model

0 引 言

目前, B-样条理论已在信号和图象处理中得到了广泛应用. 这是因为由于 B-样条为一紧致支撑的光滑的分段多项式函数, 所以它是对处理图象进行逼近与插值的有力工具. 虽然单变量的 B-样条函数已经成功地应用在信号与图象处理中^[1, 2], 但它也存在一些缺陷, 如, 如果想要表达由几个参数描述的模型或解释高维数据, 尚需频繁使用双变量或多变量函数. 在这些多变量函数中, 多变量的 Box-样条是

单变量 B-样条的自然推广, 它在许多应用中很有效. 同时, 滤子库在与小波分析相结合后, 也在图象处理中有了很多的应用. 本文将结合滤波器库和 Box 样条来重构一个完全重构模型, 并将该模型成功地应用在分解和重构图象上.

1 DFT 滤波器库

自从小波分析、滤子库和分辨率分析被统一在一个理论中之后, 滤子库在图象处理方面即获得了广泛应用. 本文将采用如下一个非常有效的 N -通

道 DFT 滤子库模型(见图 1).

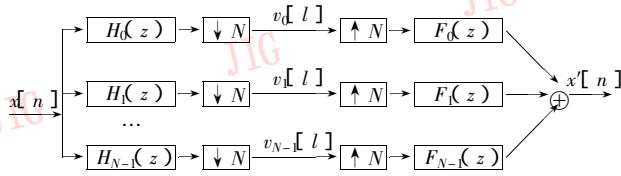


图 1 分析/综合 DFT 滤子库模型

在该模型中,输入图象 $x[n]$ 首先被分析滤子库 $\{H_i(z)\}$ 分解,然后被综合滤子库 $\{F_i(z)\}$ 合成,生成输出图象 $x'[n]$.假设两滤子库的基频带函数分别为 $H(z), F(z)$.那么 $H(z), F(z)$ 则可由其分别经频率的变化转换得来,即

$$H_i(z) = H(z e^{-j2\pi i/N})$$

$$F_i(z) = F(z e^{-j2\pi i/N}) \quad 0 \leq i < N \quad (1)$$

该模型的完全重构结果是重构图象与原图象相同,即 $x'[n] = x[n]$,也即所谓的完全重构.由此我们得出完全重构的一个充分必要条件,即滤子之间满足下列线性方程^[3]

$$\sum_{l=0}^{N-1} F(z e^{-j2\pi l/N}) H(z e^{-j2\pi(i-l)/N}) = N \delta_{0,n} \quad 0 \leq i \leq N-1 \quad (2)$$

如果使用向量-矩阵符号,此即

$$\Psi(z) \mathcal{F}(z) = \mathcal{C}(z) \quad (3)$$

其中

$$\Psi_{ik}(z) = H_{k-i}(z e^{-j2\pi i/N})$$

$$\mathcal{F}(z) = (F_0(z), F_1(z), \dots, F_{N-1}(z))^T \quad (4)$$

$$\mathcal{C}(z) = (M \ 0 \ \dots \ 0)^T$$

在这一条件下,即可得到 $x'[n] = x[n]$,它即表明输出图象为输入图象的完全重构.这正是本文提到的完全重构,虽然它在图象处理中有广泛的应用,但是,怎样构造一个完全重构模型是非常困难的,并且没有一个一般的规则.

2 双变量 Box 样条

这里首先介绍 Box 样条,即一个单变量 B-样条到多变量情形的自然推广就是 Box-样条,其定义如下^[4].(这里将仅给出双变量 Box-样条的定义,多变量情形与此类似):

定义 1 双变量 Box 样条 $M(x, y | x_n)$ 的递归定义如下:

$$M(x, y | x^1, x^2) = \begin{cases} \frac{1}{\text{area}([x^1, x^2])} & \text{if } (x, y) \in [x^1, x^2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

当 $m = 3, 4, \dots, n$ 时

$$M(x, y | x^1, x^2, \dots, x^m) = \int_0^1 M(x, y) - tx^m | x^1, x^2, \dots, x^{m-1} dt \quad (6)$$

其中

$$x_n = \{x^1, x^2, \dots, x^n\} \subset Z_0^2 \quad (7)$$

为一方向集,并且

$$\text{Span}(x_n) = x_n = R^2 \quad (8)$$

$[x_n]$ 为仿射立方体,其定义为

$$[x_n] = [x^1, x^2, \dots, x^n] =$$

$$\left\{ \sum t_i x^i : 0 \leq t_i < 1, i = 1, \dots, m \right\} \quad (9)$$

有时,为应用方便,也可采用另一定义:

定义 2

$$B(x, y | x^1, x^2) = \begin{cases} \frac{1}{\text{area}([x^1, x^2])} & \text{if } (x, y) \in [x^1, x^2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

当 $m = 3, 4, \dots, n$ 时

$$B(x, y | x^1, x^2, \dots, x^m) = \int_0^1 B(x, y) - tx^m | x^1, x^2, \dots, x^{m-1} dt \quad (11)$$

而其中仿射立方体的定义则改为

$$[x_n] = [x^1, x^2, \dots, x^n] =$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n t_i x^i : -1/2 \leq t_i < 1/2 \right\} \quad (12)$$

Box 样条小波有一些很好的性质,例如,如果令

$$V_k = \left\{ \sum_{j \in Z^2} M(2^k(x, y) - j) \alpha(j) : \alpha \in L_2(Z^2) \right\} \quad (13)$$

则所定义的 V_k 空间即为 $L_2(R^2)$ 的多分辨率逼近.

由于这类性质在图象处理中非常有效.即在图象处理中不仅可使用 Box 样条来构造给定数字图象的逼近,而且 Box 样条空间还为和已给图象在给定点的匹配提供了唯一的样条插值.

3 完全重构模型

首先给出一类特别的双变量 Box 样条.它将在模型重构后被使用.

定义 3 令

$$x = (x, y) \in R^2, e^1 = (1, 0), e^2 = (0, 1) \quad (14)$$

然后令

$$M_{uv}(x, y) = M(x | X_{t+u+v}) \quad (15)$$

其中

$$X_{t+u+v} = \{ \underbrace{e^1, \dots, e^1}_t, \underbrace{e^2, \dots, e^2}_u, \underbrace{e^1 + e^2, \dots, e^1 + e^2}_v \} \quad (16)$$

很容易验证 $M_{uv}(x, y)$ 确实为一双变量 Box 样条, 而且, 对 Box 样条的两种定义, 它们有如下关系

$$M_{uv}(x, y) = B_{uv}(x, y) + C_{uv} \quad (17)$$

其中

$$C_{uv} = ((t + v)/2)(u + v)/2 \quad (18)$$

虽然前面已经论述了构造完全重构模型的充分必要条件, 但要建立一个完全重构模型, 还需要计算出满足该条件的分析/综合滤子. 下面, 即利用双变量 Box 样条 M_{uv} 来构造该分析/综合滤子. 为简单起见, 本文将仅考虑 4-频带 ($N = 4$) 滤子库, 但其方法对一般情形也适用.

已知 $M_{l,m,n}(x, y)$ 生成 $L^2(R^2)$ 的一多分辨率逼近, 其对应尺度函数 φ_0 的 Fourier 变换为

$$\hat{\varphi}_0^{l,m,n}(w_1, w_2) = \frac{\hat{B}_{l,m,n}(w_1, w_2)}{\sqrt{\sum_{(k_1, k_2) \in Z^2} |\hat{M}_{l,m,n}((w_1, w_2) + 2\pi(k_1, k_2))|^2}} \quad (19)$$

这里, 滤子 $H^{(l,m,n)}$ 定义为

$$H^{(l,m,n)}(w_1, w_2) = \frac{\hat{\varphi}_0^{(l,m,n)}(2w_1, 2w_2)}{\hat{\varphi}_0^{(l,m,n)}(w_1, w_2)} \quad (20)$$

然后, $H_k (k = 0, 1, 2, 3)$ 可作如下定义

$$\begin{aligned} H_0(w_1, w_2) &= H^{(l,m,n)}(w_1, w_2) \\ H_1(w_1, w_2) &= e^{(w_1+w_2)i} H^{(l,m,n)}(w_1 + \pi, w_2) \\ H_2(w_1, w_2) &= e^{w_2i} H^{(l,m,n)}(w_1, w_2 + \pi) \\ H_3(w_1, w_2) &= e^{w_1i} H^{(l,m,n)}(w_1 + \pi, w_2 + \pi) \end{aligned} \quad (21)$$

现在令

$$\begin{aligned} F_0(w_1, w_2) &= \overline{H^{(l,m,n)}(w_1, w_2)} \\ F_1(w_1, w_2) &= e^{-(w_1+w_2)i} \overline{H^{(l,m,n)}(w_1 + \pi, w_2)} \\ F_2(w_1, w_2) &= e^{-w_2i} \overline{H^{(l,m,n)}(w_1, w_2 + \pi)} \\ F_3(w_1, w_2) &= e^{-w_1i} \overline{H^{(l,m,n)}(w_1 + \pi, w_2 + \pi)} \end{aligned} \quad (22)$$

容易验证 $\{H_i, F_i\}$ 满足完全重构的充分必要条件, 现在的问题是如何计算 $H^{(l,m,n)}$.

经计算可知

$$\begin{aligned} \hat{B}_{l,m,n}(w_1, w_2) &= \left(\frac{1 - e^{-w_1i}}{iw_1}\right)^l \times \\ &\quad \left(\frac{1 - e^{-w_2i}}{iw_2}\right)^m \times \\ &\quad \left(\frac{1 - e^{-(w_1+w_2)i}}{i(w_1+w_2)}\right)^n \end{aligned} \quad (23)$$

因此, 由式(20)则可得到

$$H^{(l,m,n)}(w_1, w_2) = \left(\frac{1 + e^{-w_1i}}{iw_1}\right)^l \times \left(\frac{1 + e^{-w_2i}}{iw_2}\right)^m \times$$

$$\frac{\left(\frac{1 + e^{-(w_1+w_2)i}}{i(w_1+w_2)}\right)^n \times \sqrt{\sum_{k_1, k_2} |\hat{M}_{l,m,n}((w_1, w_2) + 2\pi(k_1, k_2))|^2}}{\sqrt{\sum_{k_1, k_2} |\hat{M}_{l,m,n}((2w_1, 2w_2) + 2\pi(k_1, k_2))|^2}} \quad (24)$$

在求出 H 后, 即可进一步求得 H_0, H_1, H_2, H_3 , 这样将得到分析滤子库, 而合成滤子库则可由下式获得,

$$F_i(w_1, w_2) = \overline{H_i(w_1, w_2)}, i = 0, 1, 2, 3 \quad (25)$$

这里需注意, 由于式(24)中的求和为一无限和, 因此, 需要通过指定指标 k_1, k_2 的上界 N 来计算一近似值, 比如, 令 $N = 40$, 然后可对 $|k_1|, |k_2| < 40$ 求和. 这一逼近, 经实验验证具有很好的收敛性质.

此时, 在 4-频带滤子库被构造出来后, 即可以用 $\{H_i\}$ 来分解输入的数字图象, 同时可用 $\{F_i\}$ 来合成图象. 根据完全重构的条件, 该重构将为一近似完全的重构, 其准确性取决于近似计算 H_0 的程度. 实验结果已证明这种重构方法非常有效.

4 实验结果

我们需要通过截断序列来计算 $H^{(l,m,n)}$ 的近似值, 结果显示, 所重构的图象与原图象之间的平均绝对差值随着 N 的增大而迅速减小, 其在 $N = 40$ 的情况时, 所得到的 H 量值 $|H^{(l,m,n)}|$ 如图 2.

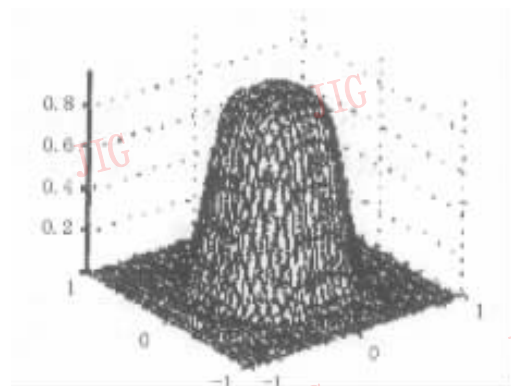


图 2 H 的量值

在本文的实验中, 在 $l = 1, m = 1, n = 2$ 时, 我们对 $N = 15, 20, 25, 30, 35, 40$, 分别计算了 $H^{(l,m,n)}$ 的近似值, 进而由此构造出滤子库, 并用其来分解重构原始图象(图 3). 通过所对应的 Box 样条小波分解后, 又重新构成的输出图象(图 4).

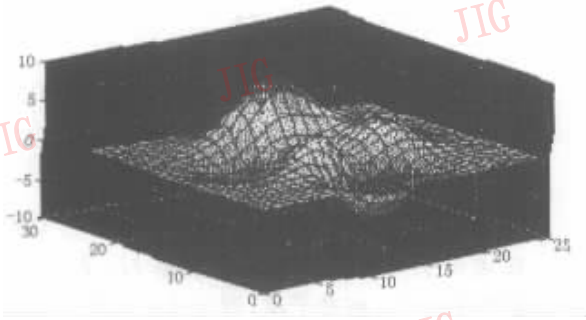


图3 原始图象

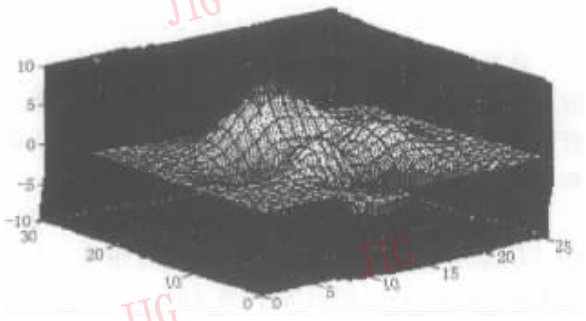


图4 重构图象

5 结 论

本文结合 DFT 滤子库和双变量 Box 样条给出了一个构造重构模型的方法. 该模型被成功应用于图象处理分解和重构中. 业已证明, 双变量样条小波在处理高维图象时非常有效, 因此探索更一般的多变量样条小波将是一项非常有前景的工作, 而且, 在文献 [10] 中, Haar 小波在分式层次放大中的应用也有所探索. 正如该文中所提到的, Haar 小波有很多优点, 但也有很多不足. 如果将双变量或多变量样条小波应用在该领域将是一件非常有趣的工作.

参 考 文 献

- 1 Aldroubi A, Eden M, Unser M. Discrete spline filters for multiresolutions and wavelets of l_2 , *SIAM J. Math. Anal.*, 1994 25 :14121432.
- 2 C. de Boor, Hollig K, Riemenschneider S. *Box splines*, New York: Springer-Verlag: 1993.

- 3 Charles K Chui. *Multivariate Splines*, SIAM, 1988.
- 4 Charles K Chui, Stockler J, Ward J D, Compactly supported box-spline wavelets, *Approx. Theory Appl.*, 1992 8 :77100.
- 5 Gheorghie Micula, Sanda Nicula. *Handbook of Splines*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- 6 Helmuth Spath. Two dimensional spline interpolation algorithms, A K Peters, 1995.
- 7 Shanker Moni, Kashyap R L. *Multisplines, Non-Wavelet multiresolution and Piecewise Polynomials. Wavelet Application in Signal and Image Processing*, San Diego, California 1995 393404.
- 8 Riemenschneider S, Chen Z. Box splines, cardinal series and wavelets. C. K. Chui(ed), In: *Approximation Theory and Functional Analysis*, Academic Press, Boston, 1991 :133149.
- 9 Bose T, Chen M Q. Design of two-dimensional digital filters in the spatial domain, *IEEE Trans. Signal Proc.* 1993 41 :14041409.
- 10 Yuan Xiaojun, Ren Jicheng, Ma Xiangying *et al.* Fractional-level zooming of multiresolution images, *Advances in Computer Science and Technology*, International Academic Publishers, 1999, II :825829.
- 11 Y. Hui, C. W. Kok, T. Q. Nguyen. Theory and design of two-dimensional non-separable shift-invariant filter banks. In: *Wavelet Application in Signal and Image Processing*, Denver, Colorado 1996 295306.

袁晓君 中国科学院计算技术研究所 CAD 室博士研究生. 主要研究领域为计算机图形学、海量图象处理、多媒体数据库和虚拟现实等.

李 华 中国科学院计算技术研究所 CAD 室主任, 研究员, 博士生导师. 主要研究领域为计算机图形学、医学图象处理、海量图象处理、虚拟现实和立体视觉等.